幾何計算におけるロバスト性

杉原　厚吉

1　はじめに

幾何計算は，形にかかわる情報の処理に広く現れるもので，典型的な分野を挙げただけでも，コンピュータグラフィックス，地理情報処理，パターン認識，形状設計，コンピュータビジョン，メッシュ生成など，その応用範囲は多岐に渡る．そして，それらの応用を支える幾何アルゴリズムは，計算幾何学とよばれる比較的新しい学問分野で，体系的に整理されつつある．

しかし，そこで作られた幾何アルゴリズムを応用分野へそのまま適用しても，理論どおりの性能が発揮されるわけではない．なぜなら，アルゴリズムを設計するときには，計算は正しくできることと，例外は生じないことを仮定するのが普通であるが，現実のコンピュータで問題を解くときには，誤差も例外も頻繁に発生するからである．

すなわち，幾何計算は，数値誤差と例外に対するロバスト性をもたなければならない．そして，このロバスト性の確保は，アルゴリズムの小修正という小手先の技術では達成できず，誤差と例外があることを前提として，はじめからアルゴリズムを設計し直す覚悟をもってはじめて達成できる．

本稿では，数値誤差と例外という二つの外乱に対するロバスト性の確保に焦点を合わせて，そのための手法と今後の課題についてまとめる．以下では，幾何学的な対象の配置に関する例外のことを，特に退化とよぶ．

ちなみに，幾何計算の応用的分野の中のパターン認識やコンピュータビジョンにおいては，人の認識能力の柔軟性をコンピュータでも実現したいという意味でのロバスト性の確保の課題もある．しかし，これは，心理学的要因もからむ複雑な問題で，純粋に幾何学的な問題とは異なるため，ここでは取り上げない．

2　ロバスト幾何計算の課題

一般に，計算の途中で誤差が発生すると，その大きさに応じて計算結果も真の解からずれるという意味で，誤差と解の精度の間には連続的な関係があると考えるのが常識であろう．しかし，この連続性は幾何の世界では必ずしも成り立たない．幾何アルゴリズムでは，図形同士の位置関係を判定する場面が多くあるが，計算誤差によってこの判定を誤ると，イエスかノーかの答を誤ることになるから，その影響は，誤差の大きさとは無関係に大きなものになる．すなわち，判定を誤るとユークリッド幾何の世界ではあり得ない状況に陥るという致命的な結果をもたらし，アルゴリズムが破綻してしまう．

したがって，誤差に対する幾何計算のロバスト性を確保するためには，誤差を小さくするというタイプの努力は効を奏さない．誤差を全くなくすか，さもなければ，別の方法で位相的整合性を確保しなければならない．

一方，退化の問題というのは，例外処理の煩わしさの問題である．幾何的問題には，退化した状態というのが必ずつきまとう．そして，その退化は，一般に，多くの種類がある．したがって，完全なアルゴリズムを設計するためには，すべての退化に対する例外処理を構築しなければならない．しかし，それは労ばかり多くて虚しく元気の出ない作業である．なぜなら，例外というのは滅多に生じるものではなく，したがって，例外に対するアルゴリズムを作っても，一度も実行されないまま，作ったソフトウェアは一生を終えるかもしれないからである．したがって，退化処理の煩わしさからソフトウェア技術者を解放したい．それが退化に対する課題である．

なお，退化と誤差は密接に関係がある．なぜなら，誤差によって判定を誤りやすいのは，状況が退化しているかあるいは退化に非常に近い場合であるからである．

3　主なアプローチとその成果

計算幾何学の分野で設計される幾何アルゴリズムが，誤差と退化に対して脆弱でそのままでは実用的ではないことが広く認識されるようになったのは1980年代の後半である．その頃，ロバスト性を確保するための提案がたくさん出された．それらは図1にも示すように，次の三つのグループにまとめることができる [8].

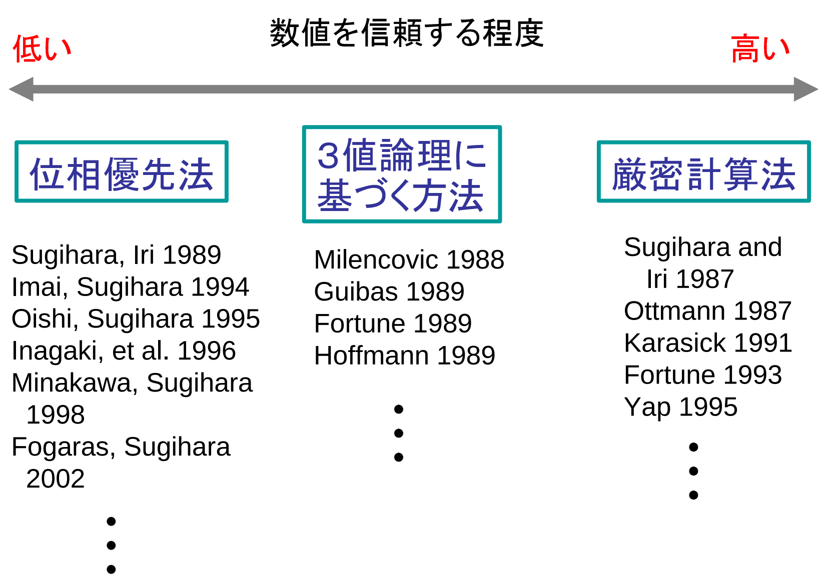

図 1. ロバスト幾何計算のためのアプローチの分類.

3.1　厳密計算法と記号摂動

第一グループは，位相構造の判定をいつも正しく行うのに十分なだけの精度を確保して計算を行おうというものである．これは，**厳密計算法**あるいは**整数帰着法**とよばれている．

位相構造の判定を正しく行なうために，無限に高い精度が必要なわけではない．なぜなら解く

べき問題を記述する入力データの精度が有限だからである．位相構造の判定は，一般に，入力データに有限回の演算を施した結果の符号の決定に帰着できる．この際，入力データが有限の精度なら，計算結果の符号も有限の精度で正しく判定できる．このことに根拠を置いて，必要な計算精度を確保しようとするのが，このアプローチである．このアプローチは，ほとんど同時に何人かの研究者が提案したが，私たちのグループもその一つである [14].

このアプローチでは，誤差の問題は解決できるが，退化の問題は解決できない．実際，判定がすべて正しく行えるということは，退化もすべて認識できるということを意味するから，すべての退化に対する例外処理を用意しないとアルゴリズムは完成しない．

この例外処理の煩わしさを回避するために，厳密計算法と併用して使われる技術が，**記号摂動法**である．これは，無限小を表す記号 ε を導入し，入力データに ε の多項式を加えることによって，実質的に摂動を加え，ε を変数とする多項式の全体が順序環をなすことを利用して，この環の中で符号の判定を行なうものである．摂動の加え方に工夫を施すと，判定したい符号が必ず非零になることを保証でき，その結果，退化の生じない世界を作ることができる．この記号摂動法を適用すると，例外処理を含まない一般の場合のアルゴリズムを用意するだけで，実質的に退化した入力も処理できる [1, 7, 16].

また，位相が正しく判定できるだけの高い精度で計算を行なうことはコストがかかるため，そのコストを下げるために，通常は，浮動小数点計算も併用される．すなわち，目的の符号をまず浮動小数点計算で判定する．このとき同時に，誤差の上限も見積り，それに基づいて，判定した符号が信頼できるか否かを判断する．信頼できる場合には，それを使い，信頼できない場合にのみ高精度の計算へ切り替える．これによって，多くの場合，かなりの加速が達成できる [4, 9].

3.2 位相優先法

ロバスト幾何計算技術の第二のグループは，上の方法とは反対の極に位置するもので，計算の精度には全く期待せず，別の方法で位相構造の整合性を確保しようとするものである．まず，計算はそもそも誤差を伴うものという開き直った前提から出発する．そして，扱う対象が満たすべき純粋に組合せ位相的な性質に着目して，その一貫性が保たれることを最優先し，数値計算の結果は，位相構造と矛盾しないときだけ使うという方針で不整合の発生を防止する．この方法は私たちのグループが世界に先駆けて提案したもので，ボロノイ図の逐次添加構成法 [15]，ボロノイ図の分割統治構成法 [6] をはじめ，3 次元ボロノイ図，線分ボロノイ図，多面体の集合演算，3 次元凸包，直線のアレンジメントなど多くの実装実績を積んできている．

位相優先法は，それ自身で退化の問題も同時に解決している．なぜなら，すべての計算は誤差を伴うものという前提から出発しているために，そもそも退化の生じていることは認識できない．言い換えると，符号判定の結果が 0 となっても，それは誤差を含む計算の結果であるから，そのまま信じることはできず，状況が退化に近いことがわかるのみである．したがって，逆説的ではあるが，誤差があることを素直に認めると，退化の問題は自然に解消してしまうのである．

位相優先法の主な長所は，(1) どのような計算精度で計算しても，決して位相的不整合は生じないこと，(2) 必ず結果が出力されて，それは位相的に整合がとれていること，(3) 計算精度を上げていくと，出力は真の解（退化している場合には真の解に摂動を加えたもの）に収束していくこ

と，(4) 浮動小数点計算が使えるから計算速度が速いこと，(5) 退化が自動的に解消されること，などである．

一方，このアプローチを具体的な幾何問題に適用するためには，対象がもつ組合せ位相的性質を抽出しなければならない．したがって，個別の問題ごとにある程度の洞察が必要で，厳密計算法ほど使いやすくはない．厳密計算法が初心者向けの技術としたら，位相優先法は中級の技術と言えよう．

直線や平面などの線形な幾何要素を扱うときには，厳密計算法はそれほど高い計算コストを要しないため，実用性が高い．しかし，曲線や曲面を含む問題になると，一般に厳密計算に必要な精度は非常に高くなるため，実用性は低くなる．一方，そのような問題に対しては，位相優先法の方が有利であろう．

また，最近では，位相優先法のボトルネックとなっている組合せ位相構造の抽出作業を，ディジタル画像近似からの抽出作業に置き換える方法も提案している [10]．幾何問題のディジタル画像による近似解は比較的容易に得られるから，この方法は位相優先法の初心者用バージョンと言うことができよう．実際，曲線や曲面を含む 2 次元円ボロノイ図や 3 次元球ボロノイ図にこの方法を適用して，その有効性を確かめることができた [3, 10].

3.3　3 値論理に基づくアプローチ

ロバスト幾何計算技術の第三のグループは，与えられた計算精度のもとで，位相構造を判定するための符号決定結果を，正と負と不明の三つの場合に分類して処理しようとする方法である．これには，たとえば [2, 5] など非常に多くのバリエーションが提案されてきたが，いずれも簡単な例題に対して論じられただけで，消えていった．

そもそもこの方法では，アルゴリズムの中のすべての判定において，イエスとノーと不明の三つの場合に処理が分岐するため，アルゴリズムが非常に複雑となる．さらに不明と判定された場合の処理は，問題ごとに個別であり，全体の整合性を保証することが難しい．これらが，簡単なトイプロブレムにしか適用できなかった主な原因であろう．

4　「超」ロバストの立場から

「超ロバスト計算原理プロジェクト」というプロジェクト名についた「超」の意味は，このプロジェクトを推進していくなかで，その具体的な姿を追求し，具体化していくべきものであろう．しかし，少なくとも，単にロバストさの程度を向上させるだけでなくて，それを超えた，何らかの質的飛躍を伴う方法論を目指すものであることは，暗黙の合意ではなかろうか．

そのような観点から，幾何計算の世界で「超」をつけてもよいと思われるロバスト計算技術を拾い出すと，表 1 にも整理したように，次のものが挙げられる．

(1) 厳密計算法

これは,「入力データの精度が有限ならば，それに有限回の代数演算を施した結果の符号は，やはり有限精度の計算で正しく判定できる」という認識に基づいて，必要な精度を確保する方法で

ある [9, 14]．単に計算の精度を高めて，判定を誤る危険性を減らすのではなく，そのような危険性を完全に回避できているという意味で「超」のつく方法論である．

(2) 記号摂動法

これは，幾何計算は有理数（または実数）の世界で行なうものという従来の常識をくつがえして，不定元 ε を変数とする多項式がなす順序環の世界で行なうことによって，退化を自動的に回避する技術である [1, 7, 16]．これは，関数の世界を超関数の世界へ拡大することによって微分方程式の解法を見通しのよいものにした方法と類似するものであり,「超」のつく方法論である．

(3) 位相優先法

これは，計算は正しくできるものという従来のアルゴリズムが当然の前提としていた仮定を捨て，すべての数値計算は誤差を伴うものであることを素直に認めた上で，数値に依存しない位相構造の一貫性をよりどころにして，幾何アルゴリズムを再構築したものである [6, 15]．その結果,どれほど低い精度の計算環境で走らせても決して破綻しないアルゴリズムを設計できるようになった．破綻の危険性を減らしたのではなくて，完全になくしたという意味で「超」のつく方法論である．

(4) ディジタル位相優先法

従来の位相優先法では，扱う対象の組合せ位相的性質を抽出するという問題ごとの個別の作業が必要であることがボトルネックとなっていて，初心者に使いにくいものであった．これに対して，問題をディジタル画像近似の形で近似的に解き，そこから抽出されるディジタル位相構造を位相優先法のために使う方法論が，このディジタル位相優先法である [3, 10]．これは，今までボトルネックであった問題ごとの組合せ位相的性質の抽出作業を，ディジタル画像近似という汎用手続きに置き換えて自動化したという意味で,「超」のつく方法論である．

(5) 超図形理論

図形のミンコフスキー和という演算は，ロボットの衝突回避計算などに役立つ基本的演算である．しかし，この演算には逆演算が必ずしも定義できないため，これを利用するためには，演算結果が図形の世界をはみ出して無意味なものになってしまうことのないように，注意深く使わなければならないという欠点があった．この代数系を拡大し，逆演算が常に施せるようにしたのが,超図形の世界である [11, 13]．これによって，衝突回避などの計算が機械的に行なえるようになった．これは，関数の世界から超関数の世界への拡大と同様の思想によるものであり,「超」のつく方法論である．

(6) 超摂動

記号摂動をはじめとする通常の摂動技術は，すべての退化を解消する技術であり，望みの退化だけを選択的に解消することは一般にはできない．

一方，現実の幾何計算においては解消したくない退化が含まれることもある．たとえば，図形をできるだけ隙間なく詰め込むパッキングにおいては，図形同士が互いに接触した退化状態を積極的に作りたい．また，3 次元ドロネー四面体分割においては，頂点に摂動を施すと体積が零の四面体が生じてしまう．このような場面では，望みの退化のみを選択的に解消したい．これは，入

力データに摂動を施すという考え方では不可能であるが，最近，場面によっては問題群自身を別の問題群へ少し変更させるという一段レベルの高いところでの摂動が有効であることを発見した．これは従来とは異なるレベルでの摂動とみなせるので，これに超摂動という名称をつけることにした．これも「超」のつく方法論であろう．

表 1.「超」ロバストな幾何計算技術

技術	目的	「超」とよぶにふさわしい理由
厳密計算法	数値誤差から生じる破綻の防止	位相構造の判定がいつも厳密に正しくできる世界を構築できる．
記号摂動法	例外処理の煩わしさの回避	退化が決して生じない世界を作ることができ，その中で退化した入力も処理できる．
位相優先法	数値誤差から生じる破綻の防止，および例外処理の回避	どんなに大きな数値誤差が発生しても，アルゴリズムは決して破綻しないで，必ず位相的に整合のとれた結果を出力する．
ディジタル位相優先法	位相優先法のボトルネックである組合せ位相構造の抽出の自動化	ディジタル画像近似から位相構造を読み取ることによって，位相抽出手続きを汎用なものにした．
超図形理論	ミンコフスキー演算が自由に使える代数系の構築	ミンコフスキー演算とその逆演算をどんな順序で施しても結果が意味をもつ．
超摂動	選択的な退化の回避	入力に摂動を加えるのではなくて，問題群自身を摂動させる．

5　今後の課題と展望

超ロバスト計算の原理の体系化を目指して，挑戦すべき課題はたくさん残っている．幾何計算の立場と，分野を横断する立場の両方から，主な課題をまとめる．

5.1　幾何計算の分野において

幾何計算において,「超」ロバスト性を達成するために他にも目指したい技術には，次のようなものがある．

(1) 厳密計算のために必要な精度を自動的に見積る技術.
(2) 位相優先法に必要な組合せ位相構造の自動抽出技術.
(3) 座標の回転などの無理数演算を厳密計算法と両立させる方法論.
(4) 厳密計算法が不得意な曲線・曲面を多く含む諸問題への位相優先法の適用例の蓄積.
(5) 位相優先法の出力と真の解との距離を見積るための汎用技術.

(6) （本稿では扱わなかったが）人間のロバストなパターン認識能力の機械による実現.

5.2 分野を横断する観点から

超ロバスト計算原理プロジェクトでは，分野ごとの個別のロバスト計算技術を，分野を横断する共通原理へまとめることを一つの目標として掲げている．この観点から，幾何における「超」ロバスト技術と他分野での超ロバスト技術に共通するものを探すと，少なくとも次のような原理が見えてきそうである．

(1) 対象の背景に存在する不変性の利用

位相優先法は，数値ではなく，対象の背景に存在する組合せ位相構造という不変性を，数値情報より優先度の高い情報として扱うものである．これと同様に，対象の背景に存在する不変性を利用した超ロバスト計算技術は他分野にもある．たとえば，偏微分方程式の数値解法においては，現象の背景に存在するエネルギー保存則などの物理法則が満たされるように離散化すると安定性が向上する．制御の分野では，対象のエントロピーは非減少であるという物理法則を積極的に取り入れることによって，安定性が向上する．

(2) 対象世界の拡大による柔軟性の確保

既に言及してきたことであるが，関数の世界を超関数の世界へ拡大するのと同様の拡大を，幾何の世界でもいくつかの局面で行なっている．有理数の中での計算を不定元 ε の多項式が作る順序環へ拡大する記号摂動法，ミンコフスキー演算の対象を図形から超図形へ拡大する超図形代数，摂動の対象を問題を表す入力データから問題群自身へレベルを上げる超摂動などもその例である．これと同様の拡大は，他分野にもある．偏微分方程式の解の世界を弱解へ拡大するという常套手段もこれに属す．

このような分野を横断する視点を，これからますます充実させていきたい．

参考文献

[1] H. Edelsbrunner and E. P. Mücke: Simulation of simplicity——A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *Proc. 4th ACM Annual Symposium on Computational Geometry*, Urbana-Champaign, 1988, pp. 118–133.

[2] L. Guibas, D. Salesin and J. Stolfi: Epsilon geometry——Building robust algorithms from imprecise computations. *Proc. 5th ACM Annual Symposium on Computational Geometry*, Saarbrücken, 1989, pp. 208–217.

[3] S. Matuura and K. Sugihara: Robust construction of sphere Voronoi diagrams using digital topology. *Proc. 2nd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, Seoul, 2005, pp. 125–133.

[4] K. Mehlhorn and S. Näher: *LEDA——A Platform Geometric Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] V. Milenkovic: Verifiable implementations of geometric algorithms using finite precision arithmetic. *Artificial Intelligence*, vol. 37, 1988, pp. 377–401.

[6] Y. Oishi and K. Sugihara: Topology-oriented divide-and-conquer algorithm for Voronoi diagrams. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, vol. 57, no. 4 (1995), pp. 303–314.

[7] K. Sugihara: A simple method for avoiding numerical errors and degeneracy in Voronoi diagram construction. *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E75-A, no. 4 (1992), pp. 468–477.

[8] K. Sugihara: How to make geometric algorithms robust. *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E83-D, no. 3 (2000), pp. 447–454.

[9] K. Sugihara: Exact computation of 4-D convex hulls with perturbation and acceleration. *Hyper Space*, vol. 10, no. 1 (2001), pp. 68–86.

[10] K. Sugihara: Robust geometric computation based on digital topology. K. Y. Chwa and J. I. Munro(eds.): *Computing and Combinatorics, Lecture Notes in Computer Science*, **3106**, 2004, pp. 3–12.

[11] K. Sugihara: Hyperoplygons generated by the invertible Minkowski sum of polygons. *Pattern Recognition Letters*, vol 25, 2004, pp. 551–560.

[12] K. Sugihara: Symbolic perturbation for Delaunay tetrahedrization without slivers. (in preparation).

[13] K. Sugihara, T. Imai and T. Hataguchi: An algebra for slope-monotone closed curves. *International Journal of Shape Modeling*, vol. 3, nos. 3&4 (1997), pp. 167–183.

[14] K. Sugihara and M. Iri: A solid modelling system free from topological inconsistency. *J. Info. Process.*, vol. 12 (1989), pp. 380–393.

[15] K. Sugihara and M. Iri: A robust topology-oriented incremental algorithm for Voronoi diagrams. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 4, no. 2 (1994), pp. 179–228.

[16] C. K. Yap: A geometric consistency theorem for a symbolic perturbation scheme. *Proc. 4th ACM Annual Symposium on Computational Geometry*, Urbana-Champaign, 1988, pp. 134–142.