量子情報、Bell不等式、超ロバスト性

「Bell不等式による量子性判定での超ロバスト性」

今井　浩
東京大学情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻

2005-10-24

代数方程式問題?

- 問題1

$$P_N = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{C}^N, |\boldsymbol{x}| = 1\}$$

$\boldsymbol{x} \in P_{N^2}$ に対し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2$ 存在? $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in P_N)$

- 問題2

$$S_N = \{\rho \mid \rho \in \mathrm{C}^{N \times N}, \rho = \rho^* \geq 0, \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$$

$\rho \in S_{N^2}$ に対し $\rho = \sum_i p_i (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^*) \otimes (\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^*)$ 存在?

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in P_N, \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0)$$

?とあるのは問題提示のスライドのように見えて、実は定義のためのスライド

量子状態: separable/entangled?

- **問題1**

  $P_N = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{C}^N, |\mathbf{x}| = 1\}$ **N次元系純粋(pure)量子状態**

  $\mathbf{x} \in P_{N^2}$ に対し $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2$ 存在? $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P_N)$

  存在: seperable
  なし: entangled

  $\rho = \mathbf{x}\mathbf{x}^*$ $(x \in P_N)$ のとき純粋状態

- **問題2**

  $S_N = \{\rho \mid \rho \in \mathbf{C}^{N \times N}, \rho = \rho^* \geq 0, \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$ **N次元系一般量子状態**

  ρ: 密度行列

  $\rho \in S_{N^2}$ に対し $\rho = \sum_i p_i (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^*) \otimes (\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^*)$ 存在?

  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in P_N, \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0)$

  存在: seperable
  なし: entangled

- **本当の問題**
  - **量子状態のパラメタは観測によってエラー有で得られる**
    ⇒ 量子推定、最適化、量子情報理論を含めた枠組み!!

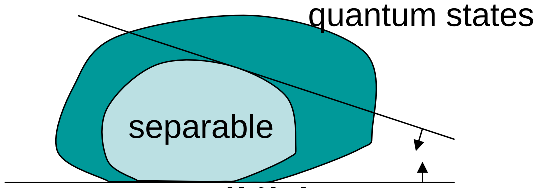
1qubit $(N=2)$: $\mathbf{C}^2$ 基底 $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$

$$2\text{qubit } (N=4): |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |01\rangle = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle):\ \text{separable}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} ?=? \begin{pmatrix}\beta_0\gamma_0\\\beta_0\gamma_1\\\beta_1\gamma_0\\\beta_1\gamma_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\gamma_0\\\gamma_1\end{pmatrix}:\ \text{entangled}$$

振り返って見ると
(時間は実は逆順)



- **パラメタ既知として**
  - Entangled witness

$$\{\rho \mid \rho = \sum_i p_i (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^*) \otimes (\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^*),\ \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in P_N,\ \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0\}$$

    凸集合 ⇒ 支持超平面: entanglement witness
    - Lewenstein, Kraus, Cirac, Horodecki, PRA, 2000
  - Separability**判定**
    - Audenaert, Verstaete, De Moor, PRA, 2001
- **推定**
  - **量子トモグラフィー**
    - **最尤推定＋**AIC (**密度行列のランクへ対応**)
      Usami, Nambu, Tsuda, Matsumoto, Nakamura, PRA, 2003

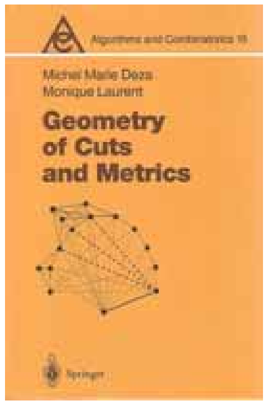
EPR**パラドクス**, Bell**不等式**

- Einstein, Podolsky, Rosen (1935)
  - **量子もつれと相対性理論の矛盾**?
- Bell**不等式**(1964)
  - Entanglement**存在⇒不等式が破れる**
  - **測定：単純な頻度(量子状態のパラメタ同定無**)
- CHSH**不等式**(Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969)
  - 2**体間で適用可能な不等式**
- Aspect**ら**(1982)
  - **実際に**CHSH**不等式の破れを実験で示す**
- **最近：**entanglement **「瞬時通信」ー** pseudo-telepathy

凸多面体組合せ論との遭遇

- Bell不等式＝古典相関全体のなす凸多面体のfacet
- 任意の2事象間に相関がある場合
  - 19世紀半ばのBooleの問題

$$n \text{ events } A_i,\ p_i = \mu(A_i): \text{given}$$
$$\Rightarrow \max(p_1, \ldots, p_n) = \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le \min(1, \sum_{1 \le i \le n} p_i)$$
$$\text{furthermore, } p_{ij} = \mu(A_i \cup A_j): \text{given}$$
$$\Rightarrow \text{what is the best estimation of } \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n)?$$

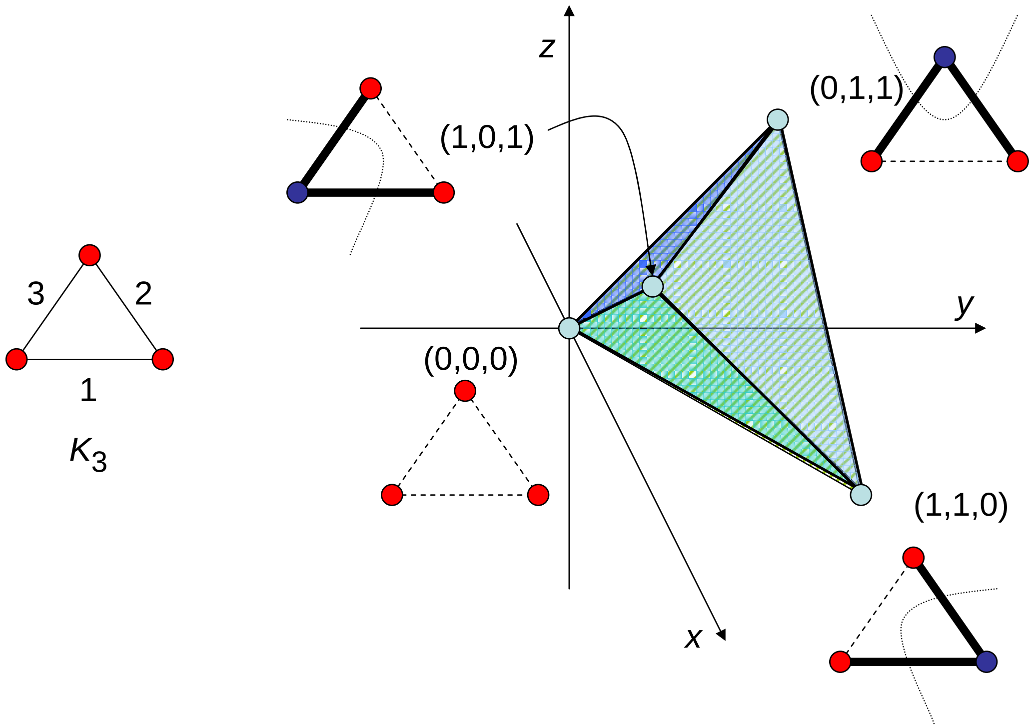


  - Boolean quadratic polytope
  - Correlation polytope
  - Cut polytope

  ⇒ a comprehensive book by Deza, Laurent (1991), 587pp.

- 量子2体系：完全2部グラフのcorrelation polytope

3点完全グラフK_3のcut polytope



2体間2値測定の相関空間

$\mathbf{C}^{N(A)} \otimes \mathbf{C}^{N(B)}$ 上の量子状態 ρ

Alice側測定 $M_i^{(A)} \ (i=1,\ldots,m^{(A)})$, Bob側測定 $M_j^{(B)} \ (j=1,\ldots,m^{(B)})$

相関表 $C(\rho)=\{(p_{ij}) \mid i=0,\ldots,m^{(A)},\ j=0,\ldots,m^{(B)},\ (i,j)\neq(0,0)\}$

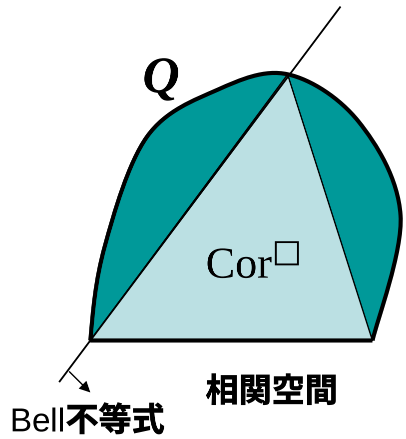
$$p_{ij}=\mathrm{Tr}(\rho(M_i^{(A)}\otimes M_j^{(B)}))$$

$$0\le M_i^{(A)}, M_j^{(B)} \le I,\ \ M_0^{(A)}=M_0^{(B)}=I$$

ρ: separable $\Rightarrow C(\rho)=\mathrm{Cor}\square(K_{m^{(A)},m^{(B)}})$

$\cong \mathrm{Cut}\square(K_{1,m^{(A)},m^{(B)}})$

$\mathbf{Q}=\{C(\rho) \mid \forall$ 量子状態 $\rho\}$: convex



Bell不等式の量子情報的既存研究

- Violation of a Bell inequality ⇒ entangled
  - 逆は真でない、たとえばbound entangled state
    ∴ Bell不等式(量子状態空間)≠entanglement witness
    差それ自体も面白い(distillation, quantum protocol, etc.)

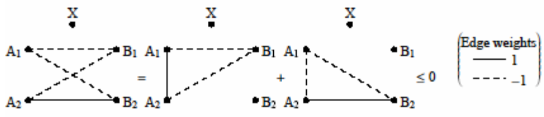
  ⇒「Bell不等式の破れ＝nonlocality」、「pseudo-telepathy」研究へ

- 低次元量子系
  - 2qubit pure state: CHSH不等式を破る=entangled
  - 2qubit mixed stateでまだまだ未解決問題

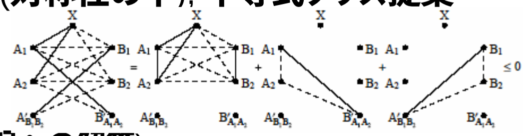
  ⇒ 低次元系での数値実験による研究アプローチへ

- 多数のBell不等式
  - 2000年頃からcdd (Fukuda)等凸包プログラム活用、膨大な不等式
    - 膨大な不等式を列挙てどれだけ意味があるという問題提起もあり
  - 一方、現在の量子化学での半定値計画論文で孫引きすると出てくる
    McRae, Davidson, J. Mathematical Physics, 1977の先駆的論文も

これまでの研究成果



- Avis, Imai, Ito, Sasaki, quant-ph/0505060
  - Triangular elimination提案・不等式の非同値性(対称性の下), 不等式クラス提案
  - (凸多面体) Fourier-Motzkin eliminationの拡張
  - (量子情報) K_nのcut polytopeの成果適用
    - 多数の多次元系での具体的Bell不等式とともに、
    - クラスとしてのBell不等式構成(前スライド問題提起への解答)



- Avis, Ito, math.CO/0505143
  - (量子情報) I_{mm22}がtight Bell不等式 (Collins, Gisinの未解決問題解決)
  - (凸多面体) Grishukhin不等式(K_7でのsporadic不等式)の拡張
- Ito, Imai, Avis, quant-ph/0508210
  - 3次元系でCHSH不等式より強力なBell不等式(存在：数値的, 強力性: 理論的)
    - Bilinear semidefinite programmingの求解
  - それらがI_{3322}より強力と強く予想、しかし理論的・数値的証明で困難
- Avis, Imai, Ito, Bell-correlation polytope and more (in preparation)
  - 物理系: その感覚で相関値で定まる関数(correlation function)に着目
    ⇒ その場合を完全2部グラフのcut polytopeに帰着、上記手法展開
  - No-signaling polytope=rooted semimetric polytopeの対応認識
  - Elliptopeと量子相関集合の関係

- Avis, Hasegawam Kikuchi, Sasaki, quant-ph/0509047
  - Hadamardグラフの量子彩色ゲーム: pseudo-telepathy

超ロバスト問題

- 不等式の破れを数値計算で検証できるのか？
  - 古典状態で等式までは成立する場合多
  - 本当に真に不等式が成立してこそ初めて判定

- 半定値計画
  - 双2次条件, さらに高次元系では高次, の取り扱い
  - Entanglement witnessでの半定値計画の活用の新展開

- 実験/推定誤差を加味して強力な不等式?

- 量子誤り訂正符号
  - 符号として用いるだけでなく、量子情報処理解析に必須

結語：量子情報処理では種々のロバスト性出現
- 1950年頃の計算機・通信機がおそらくそうであったように