# 制御における（超）ロバスト性

# Super Robustness in Control

原 辰次 (東京大学，システム情報学専攻)
Shinji Hara (The University of Tokyo)

Shinji_Hara@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

## 1　はじめに

典型的な制御系は図 1 のブロック線図で表される直結フィードバック制御系である。ここで、$P(s), K(s)$ はそれぞれ制御すべき制御対象と設計すべき制御器の伝達関数を表している。制御器 $K(s)$ はフィードバック系を安定化し、かつ制御対象の出力 $y$ が目標信号 $r$ にすみやかに追従するように、また外乱 $d$ の影響を受けないように設計されなければならない。これが、制御系設計である。

制御系の設計においては,「実世界」で要求される制御仕様を達成するために、制御対象の適切なモデルを用いて「設計空間」で行われる（図 2 参照）。その手順は以下の通りである。

(1) 制御対象のモデリング：制御対象に対する事前情報（物理系としての運動方程式など）と実験データに基づいて、制御対象の動的挙動を適切に表現するモデルを構築し、そのパラメータを同定する。

(2) 制御器の設計：得られた制御対象のモデルと設計仕様を適切に反映した評価指標に基づいて、望ましい制御器（あるいは制御則）を求める。

(3) 制御器の実装：得られた制御器（あるいは制御則）を物理的な制約条件を考慮して実装する。

さらに重要となるのは、この後に行われる「実験による検証」である。この検証が成功しなければ、設計空間で行われた制御器の設計は机上の空論となり意味を持たない。この点が制御理論の役割りにとって非常に重要な点であり、ロバスト性が大きな意味を持ってくる理由である。

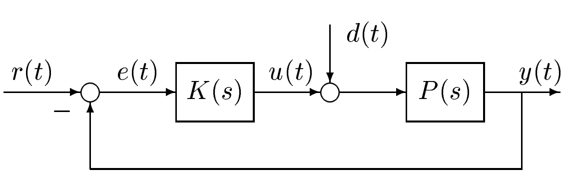


図 1: 直結フィードバック制御系

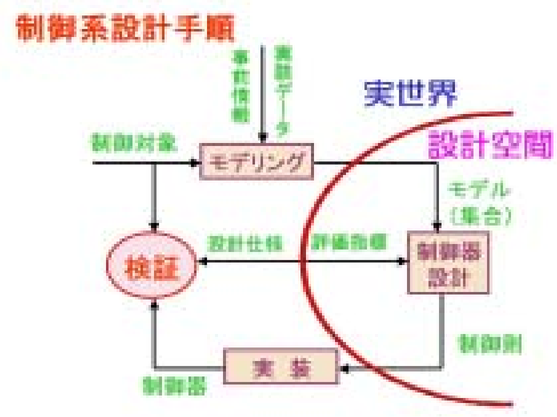


図 2: 制御系設計手順

この 20 年余り、パラメータ変動に対して頑健ないわゆるロバスト制御理論やロバスト制御系設計法に関する研究が盛んに行なわれ、理論的に大きく発展するとともに、実システムへの適用により、高性能な制御に効果を挙げてきた [1]。すなわち、ロバスト制御理論は「理論」と「実応用」のギャップを埋めることにある程度成功した理論体系と言える。

本稿ではこれらのことを意識して、まず第 2 章でロバスト制御の背景と問題設定を明らかにするとともに、第 3 章でその主要結果を紹介する。ついで第 4 章で、ロバスト制御理論の発展について述べ、今後の課題と展望を第 5 章で述べる。

## 2　ロバスト制御とは

### 2.1　ロバスト制御の背景

1960 年初頭の状態空間表現に基づいた最適制御 [2] およびその双対のカルマンフィルタ [3] は、試行錯誤を必要とした古典制御理論を系統的なものへと転換した。この状態空間表現に基づく制御理論は現代制御理論と呼ばれ、1970 年代前半まで多くの研究成果を上げてきた。しかし、その

実システムへの応用はほとんど行われなかった。

1980 年代に入ると、計算機技術の目覚ましい発展も相まって、現代制御理論（最適制御）が実システムに少しづつ応用され始めてきた。これに呼応して最適制御の問題点が理論的に指摘されてきた。LQG(Linear Quadratic Gaussian) 最適制御は、制御対象のモデルが完全に既知で状態空間表現で与えられると仮定した上で、２次形式評価関数を最小にする最適制御則を与えるものである。したがって、制御対象の状態空間モデルが実制御対象の動的挙動を正しく反映しているというある意味で理想的な仮定の上で成り立つものであった。しかし、この仮定を満たすことは非現実で、その主な理由は以下の３つにある。

- 実制御対象には何らかの非線形性が存在すること多い。
- システム同定において、モデルのパラメータを正しく同定することは困難で、一般にはモデル化誤差が生じる。
- 制御系設計のためのモデリングに当たっては、モデル化が困難な高周波域の動特性を無視したり、無限次元系の有限次元近似など低次元モデル化が行なわれることが多い。

すなわち、制御系設計用のモデルと実制御対象との間にはギャップがあると認識する方が自然であり、このギャップ (モデル化誤差) があるため、設計された補償器が実際には必ずしもうまくいかないことが起こりうる。このため、モデル化誤差を陽に考慮した制御系設計法の必要性が叫ばれ、モデル化誤差があっても設計された制御器が実際に有効に働くことを保証するいわゆるロバスト制御理論の研究が注目を浴びてきた [4, 1]。

## 2.2 ロバスト制御の基本的な考え方

ロバスト制御とは、制御系設計時に用いる制御対象のモデルと実システムの間には必ずギャップがあるという認識に立ち、これを考慮した制御系設計を行うことによって、実際に良好な性能を得る補償器を実装するものである。

特に 1980 年代半ば以降は、そのギャップを系統的かつ定量的に埋めるための理論、ロバスト制御理論が注目を浴びてきた。それらの研究では、

| |
|---|
| ロバスト制御系設計とは、単一の制御対象モデル $P_0$ を考えるのではなく、実制御対象 $P_{real}$ を含むような制御対象の集合 $\mathcal{P}$ を考え、その集合に属する全ての制御対象に対して有効な補償器 $K$ を求めるという設計問題 |

と定義され (図 3 参照)、様々なクラスの制御対象の集合に対するロバスト制御問題が検討されてきた。

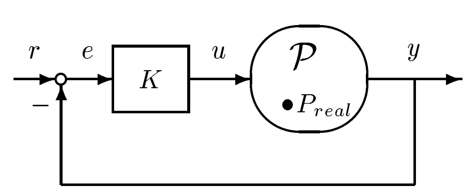


図 3: ロバスト制御系設計

通常は、

$$\text{制御対象の集合} = \text{基準制御対象モデル} + \text{変動}$$

と考え、変動部分によって

- 非線形性
- パラメータ変動 (あるいはパラメータ同定誤差)
- モデル化されない高周波動特性

などを表している。例えば、

$$\mathcal{P} = \{P(s) \mid P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}(1 + W(s)\Delta(s))\}$$

が一つの例である。ここで、$s$ の多項式 $n_p(s), d_p(s)$ の係数がパラメータ $p$ の関数とすると、パラメータ変動が表せ、$\Delta(s)$ がノルムが 1 で押さえられている任意の安定変動とすると、$W(s)$ を適当に設定することによりモデル化されない高周波動特性を考慮することができる。また、各動作点での線形化モデルをすべて含むような線形システムの集合を $\mathcal{P}$ とすることにより、非線形性をある程度考慮できる。

このように、制御対象のモデルを集合として捉えて設計を行なうのがロバスト制御の一つの特徴である。その集合すべてに対して良好な結果をえるような補償器を設計することは、実は結果的には、

| |
|---|
| 最も悪い性能を生む制御対象 (制御対象の集合の一要素) に対して最良の性能を出す補償器を設計する、すなわち最悪ケースを考慮して設計する |

ことになっている。このことは、以下に示す２つのステップ応答を比較してみると理解できる。図 4 では、設計時点では（すなわち $P_0$ に対しては）良い応答が得られているが、実験では振動的な応答となり望ましくない。一方、図 5 の方は、設計時では図 4 より少し劣るが、実験とシミュレーション結果の差が小さく、最終的には良い応答結果が得られている。すなわち、図 5 のような応答結果を得るような安定化補償器を設計するのがロバスト制御系設計法の目的である。

以上をまとめると、ロバスト制御理論への展開は、以下の２つの大きなパラダイムシフトを起こした点にあるといえる。

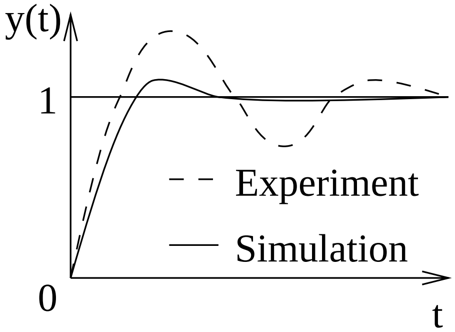


図 4: ステップ応答例 1

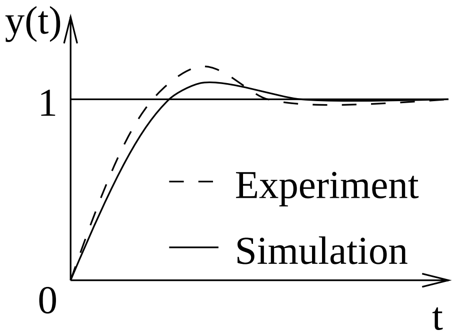


図 5: ステップ応答例 2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| モデル表現 | : | 単一モデル | → | モデル集合 |
| 評価指標 | : | 最適性 | → | ロバスト性 |
| | | (平均的最適化) | | (最悪ケース設計) |

### 2.3 ロバスト安定条件からロバスト安定化へ

最悪ケース設計において注意すべきことは、何が最悪となるかは設計前には分らないことである。もし事前にそれが分るならば、それに対する設計を行なえば良いのであるが、それができない点がロバスト制御系設計の難しさの一つであり、たとえばロバスト補償器を求めるのに通常は繰り返し計算を必要とする。したがって、最初は、構成されたフィードバック系がロバスト安定となっているかどうかを判定する解析的結果が中心であった。特に、周波数領域表現に基づいてスモールゲイン条件をベースとしたロバスト安定条件を主流として、様々な条件が導出された。

その後、複素関数の補間条件であるネヴァンリナ・ピック条件を適用して木村によって導かれたロバスト安定化補償器が存在するための条件（ロバスト安定化可能条件）[5] を一つの契機として、どのようにロバスト安定化補償器を設計するかという設計問題（ロバスト安定化問題）が大きく注目されるようになってきた。この段階での研究では、いわゆるユーラパラメトリゼーション[1]が大きな役割を果たしており、不安定極・不安定零点とが達成できる制御性能の限界にどのように影響を与えるかを定量的に示すことが可能となった。その典型的な結果は、古典理論におけるボーデの積分公式を不安定系に拡張した文献 [7] の結果である。

なお、最悪ケースを考慮して設計するというロバスト制御の考え方は、与えられた一つの制御対象や特定の外乱入力に対して最適となるように設計する最適制御の考え方とは根本的に異なるもので、Zames [8] によって提案された最悪ケースを抑える $H_\infty$ ノルムをその規範に選ぶ $H_\infty$ 制御の考えと一致する。この点が $H_\infty$ 制御がロバスト制御の代表的手法として認知されている大きな理由である。

## 3 ロバスト制御理論の主要結果：ロバスト安定条件と $H_\infty$ 制御

### 3.1 ロバスト安定化とスモールゲイン条件

本節では、ロバスト安定性の条件がスモールゲイン（$H_\infty$ ノルム）条件で表されることを説明する。

スモールゲイン条件は、フィードバック系の安定条件の十分条件として古くからよく知られており、最も単純なものは、「一巡伝達関数 $L(s) := P(s)K(s)$ が安定で、そのゲイン ($H_\infty$ ノルム) が 1 未満ならば、すなわち

$$|L(j\omega)| < 1\ ;\ \forall\omega\ \Leftrightarrow\ ||L(s)||_\infty < 1$$

が成立するならば、閉ループ系は安定である。」という結果である。このことは、上記スモールゲイン条件が成立するならば、$L(j\omega)$ のベクトル軌跡が $-1+j0$ をまわることがなく、ナイキストの安定判別より、閉ループ系の安定性が保証できるということで理解できる。したがって、一巡伝達関数 $L(s)$ を固定した場合には、この結果は一般に保守的である。しかし、閉ループ内に位相は任意でゲインが有界な変動がある場合を考えると、スモールゲイン条件がフィードバック系の安定性の必要十分条件を与えることになる。

以下、この事実に基づいて、ロバスト制御理論の最も基礎となる非構造変動に対するロバスト安定化とスモールゲイン条件との関係について考えてみる。

制御対象 $P(s)$ と補償器 $K(s)$ からなる 1 入出力フィードバック制御系 (図 6 参照) において、$P(s)$ が乗法的変動

$$\tilde{P}(s) = (1+\Delta_m(s)W_T(s))P(s) \tag{1}$$

を受けたとする。ただし、$\Delta_m(s)$ は

$$|\Delta_m(j\omega)| \le 1\ ;\ \forall\omega \tag{2}$$

[1] 安定でプロパな有理関数行列で既約分解するという手法 [6] により、与えられた制御対象に対してフィードバック系を安定化するすべての補償器を書き表すことができる。これはユーラパラメトリゼーションと呼ばれ、1980 年代以降の $H_\infty$ 制御などの新しい制御理論の基礎となっている。

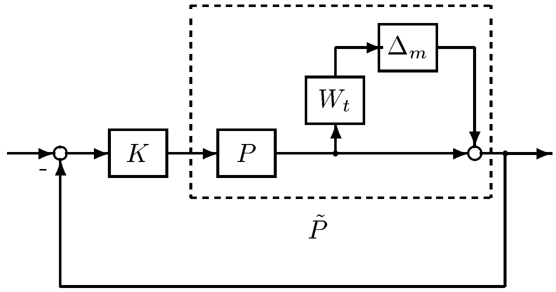


図 6: 変動を含むフィードバック制御系

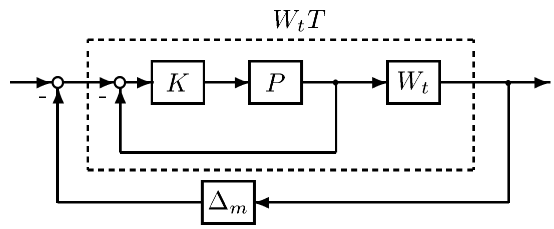


図 7: 等価なフィードバック制御系

を満たし、$\tilde{P}(s)$ の不安定極の数は $P(s)$ のそれと変わらない範囲の任意の変動であるとする。すなわち、上記条件を満たすすべての $\tilde{P}(s)$ の集合が対象とする制御対象の集合 $\mathcal{P}$ である。このとき、このような任意のモデル $\forall\tilde{P}(s)\in\mathcal{P}$ に対しても閉ループ系が安定であるとき、ロバスト安定といい、そのための必要十分条件は、スモールゲイン条件

$$|W_T(j\omega)T(j\omega)|<1\,;\quad\forall\omega \tag{3}$$

で与えられることが知られている。ここで、

$$T(s):=P(s)K(s)/(1+P(s)K(s)) \tag{4}$$

は相補感度関数と呼ばれている。この条件は、図 6 のブロック線図を等価変形した図 7 に注目してスモールゲイン条件を当てはめると容易に理解できる (もちろん、必要十分条件であることを示すためには厳密な証明が必要であるが)。なぜならば、図 6 の一巡伝達関数は

$$L(s)=W_T(s)T(s)\Delta_m(s)$$

と書け、(2) と (3) より次の不等式が成立するからである。

$$\begin{aligned}|L(j\omega)| &= |W_T(j\omega)T(j\omega)\Delta_m(j\omega)|\\ &\le |W_T(j\omega)T(j\omega)|\cdot|\Delta_m(j\omega)|<1\end{aligned}$$

したがって、ロバスト安定性のチェックは、(3) と等価な条件である

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty:=\sup_\omega|W_T(j\omega)T(j\omega)|<1 \tag{5}$$

という重み付き相補感度関数の $H_\infty$ ノルムのチェックとなる。また、ロバスト安定化制御器の設計問題は、(5) の $H_\infty$ ノルム条件を満たす制御器 $K(s)$ を求める問題となる。これは、明らかに $H_\infty$ 制御問題の一つである。

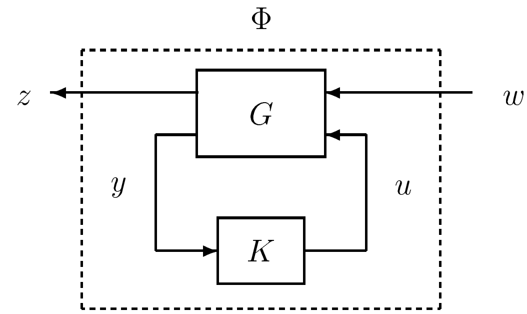


図 8: $H_\infty$ 制御問題

## 3.2 $H_\infty$ 制御とは

$H_\infty$ 制御の始まりは Zames [8] によって指摘された最適制御の評価指標に対する批判にある。その後、前節で述べたように、ノルム有界な非構造変動に対するロバスト安定化問題がスモールゲイン条件を満たす補償器を求めるという意味で $H_\infty$ 制御問題の一つとなっているということから、多くの制御理論研究者の注目を浴びるようになってきた。

$H_\infty$ 制御が提案された当初は、伝達関数をベースとして複素関数論を駆使して難しい理論展開がなされてきた。特に、多入出力系に対する $H_\infty$ 制御問題では、従来の数学の問題を行列の場合に拡張した新しい理論の構築が要請された。たとえば、古典的な補間問題の関数行列補間問題への拡張やネハリ問題の一般化などである。このため、このように難しい理論展開を必要とした $H_\infty$ 制御理論分野に参入する研究者は限られていた。

このような状況が大きく変化したのは、$H_\infty$ 制御に対するリカッチ方程式解 [9],[10] が得られてからである。すなわち、当初その解法が難解とされていた設計手順が本質的には２つのリカッチ方程式を解けば良いことが示され [9]、多くの理論研究者が理解できる範囲内となるにつれ、理論の拡張や新しい証明などが盛んに行なわれた [4]。その中で特筆すべきはＤＧＫＦ論文として知られている文献 [10] である。

また、1990 年代に入ってから多くの実システムへの応用が検討された大きな理由の一つは、問題設定の一般化がある。すなわち、個別のフィードバック制御系を考えるのではなく、どのような形態のフィードバック制御系でも扱うことができる一般化制御対象と補償器からなる LFT (Linear Fractional Transformation: 線形分数変換) 表現形式 (図 8 を参照) を用い、それに対する解法を与えたことである。このことについては、次節で詳しく述べる。

### 3.3　$H_\infty$ 制御問題の問題設定

本節では、$H_\infty$ 問題の問題設定を行う。図 8 で表されるフィードバック制御系

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$u = K(s)y \quad (7)$$

を考える。ここで、$w \in \mathbf{R}^{m_1}$ (外生信号: 目標入力、外乱入力、検出雑音など外部から加わる信号)、 $z \in \mathbf{R}^{p_1}$ (制御量: 偏差、制御入力など評価すべき信号)、 $u \in \mathbf{R}^{m_2}$ (制御入力)、 $y \in \mathbf{R}^{p_2}$ (観測出力) である。$G(s)$ は一般化制御対象と呼ばれ、補償器 $K(s)$ を 0 と置いたときの $w$ から $z$ までのオープンループ伝達関数を表しており、制御対象の他に重み関数も含まれている。

この制御系において外生信号 $w$ から制御量 $z$ までの伝達関数を $\Phi(s)$ とおくと、

$$\Phi = \mathcal{F}_\ell(G,K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (8)$$

が成立することが容易に確かめられる。このとき、$H_\infty$ 制御問題とは、与えられた $\gamma > 0$ に対して、以下の 2 つの設計仕様を満たす補償器 $K(s)$ を求める問題である。

**仕様 1)** $K(s)$ は $G(s)$ を内部安定化

**仕様 2)** $\|\Phi\|_\infty < \gamma$

仕様 1) は、制御系設計における基本仕様である安定性を保証するものである。一方、仕様 2) は制御性能を評価するもので、制御性能を $\Phi(s)$ の $H_\infty$ ノルム $\|\Phi\|_\infty$ で表現するのが $H_\infty$ 制御である。たとえば、ロバスト安定条件 (5) を満たす制御器を求めるロバスト安定化問題においては、一般化制御対象を

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & W_T P \\ I & -P \end{bmatrix}$$

と置き、$\gamma = 1$ とすればよいことがわかる。

このようにLFT 表現を用いて一般的な問題設定を行ったことによって、個別の問題毎に解を求める必要がなくなったばかりでなく、以下のようなメリットが生じた。

- 計算手順のパッケージ化が可能となり、様々な特性を持つ多くの応用への対応が容易となり、多くの分野の関心を集めることができた。

- $H_\infty$ 制御系の特徴や制御対象の特性と制御性能の限界の関係などに関して、理論的な結果が得られ、理解の助けとなるとともに、次の展開への見通しがよくなった。$L_1$ 最適化やサンプル値 $H_\infty$ 制御などはそのような例である。

### 3.4　$H_\infty$ 制御問題の解法

$H_\infty$ 制御問題の解法については、種々の方法が提案されている 。ここでは、一般化制御対象 $G(s)$ の状態空間表現が次式で与えられているとし、状態空間表現に基づいた 2 つの方法（リカッチ解と LMI 解）を紹介する。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{21} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (9)$$

ただし、$x \in \mathbf{R}^n$ である。

#### 3.4.1　$H_\infty$ 制御問題の解法 (Riccati 解)

ここでは状態空間表現に基づいた文献 [9, 10] の方法を紹介する。基本的には、LQG 最適制御と同様 2 つのリカッチ方程式を解くことにより、可解性がチェックでき、準最適補償器が求まる。

$H_\infty$ 制御問題の解法では、しばしば次の 6 つの仮定がおかれている [9]。

**C1)** $(A, B_2)$ : 可安定

**C2)** rank $D_{12} = m_2$ (列フルランク)

**C3)** rank $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$ (列フルランク) ; $\forall\omega \in \mathbf{R}$

**O1)** $(A, C_2)$ : 可検出

**O2)** rank $D_{21} = p_2$ (行フルランク)

**O3)** rank $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$ (行フルランク) ; $\forall\omega \in \mathbf{R}$

これらの仮定の中で C1), O1) は制御系の内部安定化に必要なものである。他は理論上の便宜のための仮定であるが、粗くいえば、実際の制御対象の極や零点が虚軸上に存在しなければ成立する。C2) と O2) が無限遠点の零点に、C3) と O3) が虚軸上の有限零点や極に対応する。

以降、話を簡単にするため、以下の仮定が成立しているとして、$H_\infty$ 制御問題の解を与える。

$$D_{11} = 0,\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix},\ D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

まず、状態空間表現による解を与えるために重要となるリカッチ方程式に関して定義しておく。リカッチ方程式

$$A^T X + XA + Q - (XB + S)R^{-1}(B^T X + S^T) = 0 \quad (11)$$

すなわち

$$(A - BR^{-1}S^T)^T X + X(A - BR^{-1}S^T) + Q \\ -SR^{-1}S^T - XBR^{-1}B^T X = 0 \quad (12)$$

の対称解 $X$ のうち、

$$Re\lambda(A + BF) < 0 \ ; \quad F = -R^{-1}(B^T X + S^T) \quad (13)$$

を満たす解を安定化解と呼び、

$$X = Ric\{H\} \quad (14)$$

と表すことにする。ただし、

$$\begin{aligned} H \quad &:= \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -S \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S^T & B^T \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -Q + SR^{-1}S^T & -(A - BR^{-1}S^T)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

なお、(12) 式のリカッチ方程式の解は、(15) で定義されるハミルトン行列 $H$ の固有値問題を解くことによって得られる。以上の準備のもとで、$H_\infty$ 制御問題が可解であるための必要十分条件と、すべての準最適補償器のクラスは、次の定理で与えられる [9, 10]。

**定理 1:** 仮定 C1), C2), C3), O1), O2), O3) が成立しているとする。このとき、$H_\infty$ 制御問題が可解、すなわち仕様 HS1) と HS2) を満たすプロパな制御器 $K(s) \in \mathbf{R}_p^{m_2 \times p_2}$ が存在するための必要十分条件は、

$$X = Ric\{H_X\}, \quad Y = Ric\{H_Y\} \quad (16)$$

が存在し、

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad \lambda_{max}(XY) < \gamma^2 \quad (17)$$

を満たすことである[2]。ここで、$\lambda_{max}(\cdot)$ は行列の最大固有値を表し、

$$H_X := \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & B_1 B_1^T/\gamma^2 - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H_Y := \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & C_1^T C_1/\gamma^2 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_{21}^T D_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。また、$H_\infty$ 制御問題が可解であるとき、すべての準最適補償器のクラスは、

$$\mathcal{K}_\gamma = \{K(s) = \mathcal{F}_\ell(\hat{K}, U) | \ \ U(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{m_2 \times p_2}, ||U||_\infty < \gamma\} \quad (20)$$

[2] $\mathbf{RH}_p$ はプロパな伝達関数を表す。

で与えられる[3]。ただし、

$$\hat{K}(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & I_{m_2} \\ \hat{C}_2 & I_{p_2} & 0 \end{array}\right] \quad (21)$$

で

$$\begin{cases} \hat{B}_1 := B_1 D_{21}^T + Y C_2^T \\ \hat{B}_2 := B_2 + Y C_1^T D_{12}/\gamma^2 \\ \hat{C}_1 := -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X)(I - YX/\gamma^2)^{-1} \\ \hat{C}_2 := -(C_2 + D_{21} B_1^T X/\gamma^2)(I - YX/\gamma^2)^{-1} \\ \hat{A} := (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y(C_1^T C_1/\gamma^2 - C_2^T C_2) + \hat{B}_2 \hat{C}_1 \end{cases} \quad (22)$$

### 3.4.2 $H_\infty$ 制御問題の解法 (LMI 解)

いま簡単のために、

$$\begin{aligned} D_{11} = 0 \ , \ D_{12}' \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} , \\ D_{21} \begin{bmatrix} B_1' & D_{21}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

を仮定し、線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality) に基づく解 [11] を紹介する。

**定理 2:** (23) 式の仮定のもとで、$\gamma = 1$ に対する $H_\infty$ 制御問題が可解であるための必要十分条件は、以下の 3 つの不等式を満たす正定対称行列 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{Y}$ が存在することである。

$$P := A\mathcal{X} + \mathcal{X}A^T + \mathcal{X}C_1^T C_1 \mathcal{X} + B_1 B_1^T - B_2 B_2^T < 0 \quad (24)$$

$$Q := \mathcal{Y}A + A^T \mathcal{Y} + \mathcal{Y} B_1 B_1^T \mathcal{Y} + C_1^T C_1 - C_2^T C_2 < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X} & I \\ I & \mathcal{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

ここで、リカッチ不等式 (24) と (25) は、それぞれ状態フィードバック $H_\infty$ 制御問題の可解条件と $H_\infty$ 推定問題の可解条件とに対応し、以下のように LMI 条件に書き換えることができる。

$$\begin{bmatrix} A\mathcal{X} + \mathcal{X}A^T + B_1 B_1^T - B_2 B_2^T & \mathcal{X} C_1^T \\ C_1 \mathcal{X} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}A + A^T \mathcal{Y} + C_1^T C_1 - C_2^T C_2 & \mathcal{Y} B_1 \\ B_1^T \mathcal{Y} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

また、上記可解条件が成立するとき、$H_\infty$ 補償器の一つは

$$\begin{aligned} \dot{x}_c \quad &= \quad \{A + B_2 C_c - B_c C_2 + \mathcal{Y}^{-1} C_1^T C_1 \\ &- \quad \mathcal{Y}^{-1} Q (I - \mathcal{X}\mathcal{Y})^{-1}\} x_c + \mathcal{Y}^{-1} C_2^T \ y \end{aligned} \quad (29)$$

[3] $\mathbf{RH}_\infty$ はプロパで安定な伝達関数を表す。

$$u = B_2^T \mathcal{Y}(I - \mathcal{X}\mathcal{Y})^{-1}\ x_c \tag{30}$$

で与えられる。ただし、$Q$ は (25) で定義されている負定対称行列である。

なお、(24), (25), (26) の LMI は半正定値計画法（SDP）によって解くことができる。

# 4 ロバスト制御理論の発展：$\mu$ 解析・設計〜数値最適化〜非線形制御へ

## 4.1 $\mu$ 解析・設計

$H_\infty$ 制御は、ロバスト制御の代表として、変動をひとまとめとして取り扱う、いわゆる非構造変動に対するロバスト安定化補償器のシステマティックな設計法を与えたという点で評価できる。しかし、実用的な観点から見ると、$H_\infty$ 制御はいくつかの点で不十分である。例えば、以下の２点が挙げられる。

**1)** 扱える変動が加法的変動や乗法的変動など単一の非構造的変動に限定されており、複数の変動やパラメトリック変動など構造的な変動を持つ系には直接対応できない。

**2)** ノミナルな制御対象に対する制御性能とロバスト安定条件とを満たすような補償器は設計できるが、変動後のすべての制御対象に対しての制御性能を保証するものではない。この条件が満たされるとき、制御系はロバスト性能を持つと呼ばれ、本当に要求される設計仕様である。

この２つの課題に対して、ある程度の答えを与えてきたのが、構造化特異値 $\mu$ に基づいた $\mu$ 解析・設計 [12] で、Doyle らのグループを中心に盛んに研究されてきた [13]。その枠組は、$H_\infty$ 制御の一般的な枠組をさらに一般化した図 9 に示す $\Delta$-$G$-$K$ 構造である。ここで、$G$-$K$ 構造の部分は $H_\infty$ 制御の場合と同じで、変動 $\Delta$ が加わった分だけ一般化されている。なお、$\Delta$ はブロック対角構造を持ち、パラメトリック変動やノルム有界な変動など複数の変動を統一的に扱える枠組となっている。

$\mu$ 解析・設計の成果は、１) 構造変動に対するロバスト安定化問題が取り扱えるようになった点と、２) ロバスト性能の条件は、多くの場合ロバスト性能に対応する仮想的な変動を導入することにより、ブロック数が１つ増えた構造変動に対するロバスト安定化条件に等価的に変換できることを示した点 [14] の２点である。すなわち、$H_\infty$ 制御からの大きなパラダイムシフトは、以下の通りである。

- 非構造変動 $\rightarrow$ 構造／パラメトリック変動
- ノミナル性能 $\rightarrow$ ロバスト性能

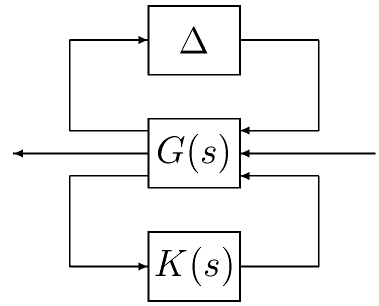


図 9: ロバスト制御系設計の一般表現形式

しかし、$\mu$ の計算が NP 困難であることが示されるなど、実際に解析／設計を厳密に行うことが非常に難しい。その一つの解決法として、その上界値であるスケーリングされた $H_\infty$ ノルムを小さくするような設計法が提案されてきている。しかし、補償器とスケーリング行列の同時最適化に対する解析解は得られておらず、$D-K$ 繰り返し法により局所的な最適解を求めるアルゴリズムが主流となっている。

このように、構造化特異値 $\mu$ に基づいた $\mu$ 解析・設計は、$H_\infty$ 制御の課題をある程度解決したより実用的な手法ではあったが、その数値解法に問題点が残されていた。これを部分的に解決するのが、線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality) [15], [16] に基づく凸最適化による設計であり、近年の内点法に基づく強力な数値計算アルゴリズム [17], [18] の開発にも後押しをされ、有効な設計法として確立しつつある。

例えば、スケーリングされた、$H_\infty$ 制御の３つのケース

- $W = I$ ：通常の $H_\infty$ 制御問題
- $W = W$：定数スケール $H_\infty$ 制御問題
- $W = W(s)$：周波数依存スケール $H_\infty$ 制御問題

に対して、解析、状態フィードバック設計（SF）、次数を固定しない出力フィードバック設計（AnyOrd）、次数を指定した出力フィードバック設計（FixedOrd）のそれぞれの問題が凸最適化問題になるか（○）になるか、ならないか（×）をまとめたのが、下記の表である。

| スケーリング | 解析 | SF | AnyOrd | FixOrd |
|---|---|---|---|---|
| $W = I$ | ○ | ○ | ○ | × |
| $W$ | ○ | ○ | × | × |
| $W(s)$ | × | × | × | × |

このように、凸計画問題になる出力フィードバック設計問題のクラスは限定されており、現在 LMI 条件より一般的なクラスの不等式制約条件に基づく設計法が検討されている。

## 4.2　数値最適化設計へ

前節で述べたLMI アプローチは、単に $\mu$ の数値解法の側面だけを解決しただけではなく、以下の２つの課題に対する解決にもなっている。

**a)** 実応用においては単一の評価指標ではなく、極配置等を含めた複数の設計仕様を評価する多目的制御系設計法の確立が望まれている。

**b)** サーボ系設計への適用においては、虚軸上の極の影響で標準的な解法が直接使えないという問題がある。

一つ目の課題である多目的制御性能を評価する設計法としては、$H_2/H_\infty$ 制御が典型的なものとして知られており、ある種の仮定のもとで十分条件を与える問題が、凸計画問題として解けることが示されている [19], [20]。これを、より一般的な枠組で考えると、多目的制御を複数の LMI 条件を満たす補償器を求める凸計画問題として定式化し直すことができ、保守性は残るものの数値解法によって解が得られる。

二つ目の課題である $H_\infty$ 制御によるサーボ系設計に対しては、その問題点を克服するために、これまでに幾つかの方法が提案されている [21]。しかし、LMI 表現を用いるとリカッチ方程式をベースとした $H_\infty$ 制御問題の可解条件を得るために必要であった虚軸上の零点条件が不要になるため、直接的にサーボ系設計問題を解くことが可能になる。

このように、LMI 表現に基づく設計法は、ロバスト制御系設計の重要課題を解決する一つのアプローチとして有効である。しかし既に述べたように、スケーリング付きの出力 $H_\infty$ 制御問題や補償器の次数や構造を固定した $H_\infty$ 制御問題などは一般に凸最適化問題とはならない。よって、LMI に基づくアプローチは適用できず、大域的最適解を求めるのは困難である。そこで最近、ロバスト制御問題に関連するいくつかの非凸最適化問題が定式化され、その大域的最適解の解法アルゴリズムも検討されてきている。その中の最近の大きなトピックスは、二乗和（SOS:Sum-of-Squares）の基づく凸緩和手法 [25] や確率論的アプローチ [26, 27] である。さらに、多目的最適化において共通のリアプノフ関数を用いると保守性が非常に大きくなるという欠点があることから、共通のリアプノフ関数を用いない方法が検討され始めてきている。

以上、数値最適化による設計法の大きなねらいをまとめると、以下のようになる。

| | | | |
|---|---|---|---|
| • | 単一性能 | → | 複数 (多目的) 性能 |
| • | 制御器の構造制約無し | → | 制御器の構造制約有り |

いづれにしても、これまでどちらかというと解析的な解を追究してきた制御理論も計算機パワーを最大限生かした数値最適化と組み合わせて、より実用的な設計法の確立を目指す方向で現在も研究が盛んに行なわれてきている。

## 4.3　非線形制御への展開

これまで述べてきたロバスト制御理論は、すべて線形理論であった。すなわち、制御対象に何らかの非線形性があったとしても、それを線形モデル集合という形で取り扱ってきた。したがって、線形ロバスト制御理論で、広いクラスの非線形系を扱うことは不可能である。しかし、非線形性がある特殊なクラスに入っていることが分かっていれば、線形ロバスト制御理論が適用可能である。そのクラスは

- 線形系＋非線形要素 (飽和など) ＋変動
- パラメータ依存線形系 (LPV System)

である。これらに対する近年の結果は、1960 年代に得られた結果や手法の拡張および体系化となっている。

１番目のクラスに対するアプローチは、Megretski と Rantzer らのグループによって近年精力的に研究されてきた IQC (Integral Quadratic Constraint) 理論 [22] である。これは文字通り、２次形式の周波数領域積分を制約とする非線形要素や変動に対するロバスト安定性に関する理論である。注目されている理由は、以下の４つである。

- IQC で表現できる非線形要素 (飽和、摩擦など) や変動 (時変、時不変) のクラスはかなり広い。
- 円板条件やポポフ条件など 1960 年代の結果をその特別な場合として含むばかりでなく、スケーリング付きの $H_\infty$ 制御問題も含むなどかなり一般的な結果が得られている。
- 表現の自由度があり、保守性の低い表現が可能である。
- 有界性実補題の一般化である KYP 補題の行列不等式版を用いて、解析は LMI 条件として表せる。

すなわち、IQC の枠組は、これまでの線形ロバスト制御理論の一つの集大成と位置付けられる。ただし、設計問題は必ずしも凸最適化問題になるわけでなく、残された課題は多い。

一方、２番目のクラスは、実際の物理パラメータが変化する線形系を直接表しているばかりでなく、動作点近傍で線形近似した非線形系をあるパラメータによって変化する線形系の集合として捉えることができる。いま、このパラメータを $\theta$ とすると、システムは固定された $\theta$ に対しては線形系となっている。そこで、設計する補償器も $\theta$ に応じて変えることを許せば、一つの固定された補償器で制御する通常のロバスト制御よりも制御性能が高い制御系が構築できる可能性がある。

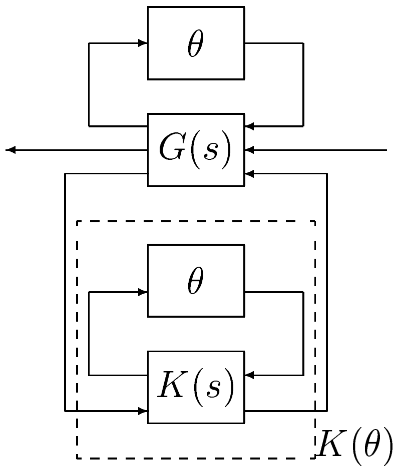


図 10: ゲインスケジュリング制御系設計の一般表現形式

実際、古くから航空機の制御では高度をパラメータとして、幾つかのパラメータに対して異なる補償器を持ち、それらを切替えていくゲインスケジュリング制御と呼ばれる方式が使われてきた。近年のゲインスケジュリング制御 [23],[24] は、このアイデアを体系化しようとするもので、図 10 のように LFT 表現されたシステムに対して、パラメータに依存したリアプノフ関数を用いた解析・設計手法が提案されている。古典的なゲインスケジュリング制御はアイデアの域を出ず、安定性の保証はなされていなかった。これに対し、この新しい流れでは、どのように安定性を保証するか、またロバスト性能をどう表しどう保証するかに注目し、幅広い応用が可能となるよう理論体系化が目指されている。すなわち、これまでのロバスト制御理論が目指し勝ち得てきたものをもう一歩進め、その流れの中でどこまで非線形制御に適用できるかに挑戦しているものと位置付けられる。従来のロバスト制御を拡張した結果が得られ、その実システムへの応用も検討はされているが、現在の所得られている結果は必ずしも満足いくものではなく、今後のさらなる研究がまたれる。

## 5 今後の課題と展望

これまで述べてきたように、ロバスト制御理論は線形制御理論をベースとして「理論」と「実応用」とのギャップをどこまで埋められるかに挑戦し、理論の体系化ばかりでなく、実応用での実績においても大きな成果を上げてきた。しかし当然のことであるが、より実用に供するために解決されなければならない課題は多い。本節では、２つのレベルに分けて紹介することにする。

低いレベルは、従来のロバスト制御の枠での展開である。ロバスト制御理論において常に指摘されるのは、理論的に得られる条件の保守性である。理論的に何か結果を出そうとすると、どうしても現実とのギャップが大きくなる傾向にあり、その発展の多くは保守性の低減に費されてきたと言って過言でない。以下では、まず” システム表現” の立場から今後の可能性を考えてみよう。

まず、周波数領域で考えると、「位相」を理論的に取り扱う枠組が必要となる。これまでの理論の多くがゲインをベースとしており、位相に関して大きく成功したものはない。また、制御帯域を陽に意識した枠組も重要である。これまでは、重み関数という形で帯域が考慮されていたが、直接的に扱える枠組が構築されるならば、よりエンジニアリングセンスを生かすことが可能となり、理論と応用のギャップを縮めることにつながる。これに関しては、筆者らは有限周波数 KYP 補題を導出しており [28, 29]、これを一つの出発点と考えている。

一方、時間領域の表現に関しては、非線形系に対して一つのモデルを考えるのではなく、マルチモデルで対応する考えが最近検討されてきている。これは、前節の最後に述べた形のゲインスケジュリングの拡張を目指すもので、補償器のスイッチングが存在するため、ハイブリッドシステム理論 [30] の一つとしての展開が必要である。さらに、これまでは状態空間表現が主流であり、状態変数を無機化することによりどのようなシステムも同等に扱うことにより統一的な展開が図れてきた。しかし裏を返せば、それぞれが持っている物理的意味を無視したことになっており、これが保守性を生む一つの要因となっている。物理的な特性を十分考慮した新しいモデルに基づく理論展開が待たれる。

次に” 評価指標” に関してであるが、これまでの制御性能の評価は、$H_2$ ノルムのような平均評価か $H_\infty$ ノルムのような最悪ケース評価のどちらかであった。最近の解説記事 [31] の最後でも述べたが、制御性能の評価を豊にしていくためには、平均評価や最悪評価をその特殊な場合として含む確率的な評価規準の導入も必要である。

高いレベルは、融合に関するものである。図 1 から分かるようにロバスト制御系設計のプロセスは、(1) モデル集合の同定、(2) ロバスト制御器の設計、(3) ロバスト制御器の実装の 3 つに分けられる。これまでは、(2) の部分にだけ焦点を当てた研究が主流であった。もちろん、制御対象のモデリングと制御系設計とは不可分の関係にあるという認識に立ち、(1) と (2) の融合を図る研究はなされてきたし、(2) と (3) の融合の一例として 1990 年以降急速に発展したサンプル値制御理論がある [32]。今後はこれらを融合した研究を本格的に行ない、新しい理論体系化を目指す必要がある。

いづれにしても、「実世界」を相手にしている” 制御’ には、超ロバスト性に関するチャレンジするテーマがたくさんある。

# 参考文献


[1] 原　辰次：ロバスト制御理論の回顧と展望，計測と制御，40 巻，1 号，pp. 63–69 (2001)

[2] R.E. Kalman: Contribution to the theory of optimal control, Bol Soc Mat Mexico, vol. 5, 102/199 (1960)

[3] R.E.Kalman and R.S. Bucy: New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, Ser. D, J. of Basic Eng., 95/108 (1961)

[4] ミニ特集 ”ロバスト制御 — $H_\infty$ 制御を中心にして”, 計測と制御, **29**-2, (1990)

[5] H. Kimura: Robust stabilizability for a class of transfer-functions, IEEE Trans. **AC-29**-9, 788/793 (1984)

[6] M. Vidyasagar: *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press

[7] J.S. Freudenberg and D.P. Looze: Right half plane zeros and poles and design tradeoffs in feedback systems, IEEE Trans. **AC-30**-6, 555/565 (1985)

[8] G. Zames: Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses, IEEE Trans. **AC-26**-2, 585/601 (1981)

[9] K. Glover and J.C. Doyle: State-Space Formulae for Stabilizing Controllers that Satisfy a $H_\infty$ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems and Control Problems, System & Control Letters, **11**-2, 167/172 (1988)

[10] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis: State Space Solutions to Standard $H_2$ and $H\infty$ Control Problems, IEEE Trans. Auto. Contr., vol. 34, 831/847 (1989)

[11] T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general $H_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica*, **30**-8, 1307/1317 (1994)

[12] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainty, Proc. IEE, 242/250 (1982)

[13] A. Packard and J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, **29**-1, 71/109 (1993)

[14] 藤田: ロバスト制御性能と $\mu$-シンセシス, システム/制御/情報, **37**-2 (1993)

[15] S. Boyd et al.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)

[16] T. Iwasaki: Control System Design via LMIs、計測と制御, **34**-3 (1995)

[17] J.E. Nestrov and A.S. Nemirovsky : Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM (1994)

[18] S. Boyd and L.El. Ghaoui: Method of centers for minimizing generalized eigenvalues, *Linear Algebra and Its Applications*, **188**, 63/111 (1993)

[19] P.P. Khargonekar and M.A. Rotea: Mixed $H_2/H_\infty$ control: a convex optimization approach, *IEEE Trans. Auto. Control*, **36**, 824/837 (1991)

[20] I. Kaminer, P.P. Khargonekar and M.A. Rotea: Mixed $H_2/H_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization, *Automatica*, **29**, 57/70 (1993)

[21] 原: ロバストサーボ系設計法, SICE 夏期セミナー’92 テキスト, 55/68 (1992)

[22] 藤岡、浅井: IQC に基づく非線形フィードバック制御系の設計解析、計測と制御, **39**-2, 119/1251 (2000)

[23] ミニ特集：ロバスト制御の新展開 - ゲインスケジューリング、計測と制御, **34**-3, 183/187 (1995)

[24] D.J. Leith and W.E. Leithead: Survey of gain-scheduling analysis and design, *Int. J. Control*, **73**-11, 1001/1025 (2000)

[25] C. Scherer: How to Construct Asymptotically Exact Relaxations in Robust Control, 計測と制御，44 巻，8 号, 519/533 (2005)

[26] 原: ロバスト制御における数値最適化の動向、計測と制御, **36**-11, 756/761 (1997)

[27] 大石、藤崎：ロバスト制御のための確率的アプローチ：現状と展望, 計測と制御，44 巻，8 号, 546/5551 (2005)

[28] T. Iwasaki and S. Hara: Generalized KYP Lemma: Unified Frequency Domain Inequalities with Design Applications, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 41–59 (2005)

[29] 原: 有限周波数 KYP 補題とその動的システム設計への応用、計測と制御, **44**-8, 534/539 (2005)

[30] 特集「ハイブリッドシステムの最前線」, 計測と制御，44 巻, 7 号 (2005)

[31] 原: 同定／制御における確率論的アプローチ、計測と制御, **39**-12 (2000)

[32] 原, 萩原: サンプル値制御理論の展開; システム制御情報学会誌, 41〔1〕12-20（1997）